Equazioni Differenziali

Le equazioni differenziali sono equazioni in cui l'incognita è la y che è presente nelle sue derivate.
L'ordine di un equazione differenziale è determinato della derivata con l'ordine maggiore.

$$\boldsymbol{F\left[x; y' dx; \dots y^{(n)}(x)\right] = 0}$$

Un equazione differenziale può avere tre tipi di soluzioni:
a) soluzione generale
b)soluzione particolare
c)soluzione singolare

Soluzione generale: è espressa da infinite curve il cui grado di infinità coincide con l'ordine dell'equazione

Es. $y'' = x \rightarrow \int y' dy = \int x dx \rightarrow y' = \frac{x^2}{2} + c_1$

$\int y' dy = \int \frac{x^2}{2} + c_1 \, dx \rightarrow y = \frac{x^3}{6} + c_1 x + c_2$

Dato che sia c_1 che c_2 possono assumere infiniti valore l'equazione ha ∞^2 soluzioni

Soluzione particolare: si ottiene dalla generale assegnando le condizioni iniziali che permettono di calcolare le costanti

Es. $\begin{cases} y'' = x \\ y(0) = 3 \\ y' = 2 \end{cases}$ $\begin{cases} y'' = x \\ y = \frac{x^3}{6} + c_1 x + c_2 \\ y' = \frac{x^2}{2} + c_1 \end{cases}$ $\begin{cases} 3 = 0 + 0 + c_2 \\ 2 = \frac{1}{2} + c_1 \end{cases}$ $\begin{cases} c_2 = 3 \\ c_1 = \frac{3}{2} \end{cases}$ $\rightarrow y = \frac{x^3}{6} + \frac{3}{2}x + 3$

Soluzione singolare: se esiste, rappresenta l'insieme delle curve che risulta tg alla soluzione generale ed è chiamato inviluppo

Es. $\sqrt{y - x}(y' - 3x) = 0 \rightarrow y - x = 0 \rightarrow y = x$

EQUANZIONI DI 1° ORDINE (y')

1) Variabili separate
2) Variabili separabili
3) Lineari

Notazione di Leibniz
$y' = \frac{dy}{dx}$

Variabili Separate

$\boldsymbol{A(x)dx + B(y)dy = 0}$ Formula generale

$\boldsymbol{\int A(x)dx + \int (B(y)dy = c}$ Metodo risolutivo: integrare sia le x che le y

Variabili Separabili

$A(x)B(y)dx + C(x)D(y)dy = 0$ Formula generale

$\frac{A(x)}{C(x)}dx + \frac{D(y)}{B(y)}dy = 0$ Metodo risolutivo: separare le y dalle x per applicare il metodo precedente

Lineari

$y' + p(x)y = q(x)$ Formula generale

Metodi risolutivi:

a) $q(x) = 0$ **Omogenea** → $y = ke^{-\int p(x)dx}$

b) $q(x) \neq 0$ **Non omogenea** → $y = e^{-\int p(x)dx}\left[\int e^{\int p(x)dx} q(x)dx + k\right]$

EQUAZIONI DI 2° ORDINE (y'')

$Ay'' + By' + Cy = f(x)$ Formula generale

a) se $f(x) = 0$ → è omogenea → $y = s(x)$

b) se $f(x) \neq 0$ → non è omogenea → $y = s(x) + g(x)$

Per trovare $s(x)$

Si ipotizza la soluzione $y = e^{kx}$ e la imponiamo come soluzione dell'equazione. Si avrà quindi che:

$y = e^{kx}$

$y' = ke^{kx}$

$y'' = k^2 e^{kx}$

Quindi mettendo queste funzioni nell'equazione originale e si trova che

$Ak^2 e^{kx} + Bke^{kx} + Ce^{kx} = 0$

Raccogliendo si avrà che

$e^{kx}[Ak^2 + Bk + C] = 0$

Dato che un esponenziale non può essere uguale a zero troviamo l'equazione caratteristica

$$Ak^2 + Bk + C = 0$$

Quindi, data l'equazione differenziale, si utilizza direttamente l'equazione caratteristica e si ricavano i valori di k.

Inoltre se: $\Delta > 0 \rightarrow s(x) = c_1 e^{kx} + c_2 e^{kx}$

$\Delta = 0 \rightarrow s(x) = e^{kx}[c_1 + xc_2]$

$i = \sqrt{-1}$

$\Delta < 0 \rightarrow s(x) = e^{kx}[c_1 cos\beta x + c_2 sen\beta x]$ dove $k_1 = \alpha + i\beta$; $k_2 = \alpha - i\beta$

Per trovare $g(x)$

1) **Se $f(x) = P(x^n)$**
   a) $C \neq 0 \rightarrow g(x) = P_1(x^n)$
      Es. $y'' + 2y' + y = 2x$
      $f(x) = 2x \rightarrow g(x) = ax + b \rightarrow g'(x) = a \rightarrow g''(x) = 0$
      Si sostituisce a $y'' + 2y' + y = 2x \rightarrow 0 + 2a + ax + b = 2x$
      Applicando il principio di identità dei polinomi si ricava così il valore di a e di b e quindi la g(x)
   b) $C = 0 \rightarrow g(x) = P_1(x^{n+1})$
      Es. $y'' + 2y' + y = 2x$
      $f(x) = 2x \rightarrow g(x) = ax^2 + bx + c$

2) **Se $f(x) = P(x^n)e^{Ax}$**
   a) K_1 e $K_2 \neq A \rightarrow g(x) = P_1(x^n)e^{Ax} \rightarrow \alpha = 0$
   b) $K_1 = A$; $K_2 \neq A \rightarrow g(x) = xP_1(x^n)e^{Ax} \rightarrow \alpha = 1$
   c) $K_1 = K_2 = A \rightarrow g(x) = x^2 P_1(x^n)e^{Ax} \rightarrow \alpha = 2$

$\alpha = ripetitività$

3) **Se $f(x) = P(x^n)e^{Ax}cosBx + Q(x)e^{Ax}senBx$**
   a) **Quando** $\Delta \geq 0 \rightarrow g(x) = P_1 e^{Ax}cosBx + Q(x)senBx$
   b) **Quando** $\Delta < 0 \rightarrow g(x) = x[P_1 e^{Ax}cosBx + Q(x)senBx]$